Acciones y Cosets dobles

$H, K < G$

vamos a dejar que $\Gamma_a = H \cap aKa^{-1}$ actúe en $H \times K$

conforme a

$$(H \times K) \times \Gamma_a \to H \times K$$

$$(h,k) \bullet b = (hb, a^{-1}b^{-1}ak)$$

Para el map

$$\phi_a : H \times K \to HaK$$

$$\phi_a(h,k) = hak$$

tenemos que $\phi_a((h,k) \bullet b) = hak$, y así que para la órbita

$$\mathrm{Orb}_{\Gamma_a}(h,k) = {\phi_a}^{-1}(hak)$$

Afirmamos que hay una biyección

$$\Gamma_a \longleftrightarrow \mathrm{Orb}_{\Gamma_a}(h,k)$$

para cada par (h,k), porque definiendo $b \mapsto (h,k) \bullet b$
tenemos inyectividad: pues si $(h,k)\bullet b = (h,k)\bullet c$ implica $(hb, a^{-1}b^{-1}ak) = (hc, a^{-1}c^{-1}ak)$.
Luego de ahí $b = c$,
y para la sobreyectividad: tenemos para cada $X \in \mathrm{Orb}_{\Gamma_a}(h,k)$ existe d en Γ_a talque $(h,k) \bullet d = X$. Luego $d \mapsto X$.

Ahora

$$\#(HaK) = \frac{|H||K|}{|H \cap aKa^{-1}|}$$

pues por el lema de abstracción dos, en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H \times K \arrow[rr, "\phi_a"] \arrow[dr, "\pi"'] & & HaK \\
& H/\sim \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

el mapeo β es biyección y sabemos que $(h,k) \sim (hb, a^{-1}b^{-1}ak)$.

Es decir
$$\#(HaK) = \frac{|H||K|}{|\Gamma_a|}$$

Las diferentes clases dobles HaK son una partición de G, i.e.
$$G = \bigsqcup_a HaK$$

Esto es porque si $a \in G$ entonces $a \in HaK$ y así $\bigcup_a HaK = G$.

Y además si $HaK \cap HbK \neq \varnothing$ entonces $HaK = HbK$:
Ya que si $c \in HaK \cap HbK$ entonces $c = h_1ak_1 = h_2bk_2$, y así $a = h_1^{-1}h_2bk_2k_1^{-1}$. Luego, si $x \in HaK$ entonces tenemos $x = h_3ak_3 = h_3h_1^{-1}h_2bk_2k_1^{-1}jk_3$. i.e. $HaK \subseteq HbK$ y similarmente $HaK \supseteq HbK$.

Alternativamente, podemos pensar que tenemos
$$(H \times K) \times G \to G$$
vía
$$(h,k) \bullet a = hak^{-1}$$
la cual es una acción. Entonces para las órbitas $\mathrm{Orb}_{H\times K}(a) = \{X \in G \mid (h,k) \bullet a = X\}$ I.e $X = hak^{-1} \in HaK$.

Así, $G = \bigsqcup_a HaK$

Para contar que producen las diferentes HaK, consideramos la acción $H \times G/K \to G/K$ da por $h \bullet aK = haK$.

Con ella:
$\mathrm{Orb}_H(aK) = \{haK \mid h \in H\} = HaK$;
$\mathrm{St}_H = \{h \mid haK = aK\} = H \cap aKa^{-1}$.

Por lo tanto
$$\mathrm{Orb}_H(aK) \longleftrightarrow H/H \cap aKa^{-1}$$
i.e.
$$\#HaK = [H : H \cap aKa^{-1}]$$
y
$$|G/K| = \sum_a [H : H \cap aKa^{-1}] = \sum_a \frac{|H|}{|H \cap aKa^{-1}|}$$
o bien
$$|G| = \sum_a \frac{|H||K|}{|H \cap aKa^{-1}|}$$

:D