

CANONICAL'S PROBLEMS

Juan Márquez

- Sea $f : S \rightarrow T$ un map. Sean $A, B \subset S$ entonces
 - $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?
 - Sean $X, Y \subset T$. Demuestra $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
- Escribe y ejemplifica las definiciones de relación de equivalencia en un conjunto y clase de equivalencia.
- En \mathbb{Z} , $n \sim m$ si y sólo si $nm \geq 0$, es una relación de equivalencia.
- Demstrar que $\phi(n, m) = m + \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$ es biyectiva $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- Con las seis matrices de 2×2 de entradas en $\mathbb{Z}_2 = \{0 = [0], 1 = [1]\}$ y de determinante igual a uno, construye la tabla de Cayley multiplicativa.
- Demuestra que si $\#S = 5$, entonces hay $\binom{5}{k}$ subconjuntos con k elementos.
- Demuestra que si $\#S = 6$, entonces hay $\binom{6}{k}$ subconjuntos con k elementos.
- Demuestra que si $\#S = n$, entonces hay $\binom{n}{k}$ subconjuntos con k elementos.
- Demuestra que la composición de $\alpha : X \rightarrow Y$ y $\beta : Y \rightarrow Z$ es biyectiva, si α y β lo son.
- Encuentra las 24 matrices de dos-por-dos con *entries* en \mathbb{Z}_3 , y que tienen inverso multiplicativo:
Ejemplos:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$$
- Demuestra que el map $\mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, de los reales al intervalo abierto $x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1$, dando por

$$x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

es una biyección.

12. Demuestra que $\binom{12}{3} + \binom{12}{4} = \binom{13}{4}$
13. Supón que un conjunto de 123 elementos tiene $\binom{123}{k}$ subconjuntos con k elementos. Entonces ¿Cómo se construyen todos los subconjuntos de uno de 124 con k elementos?
14. Supongamos que $S = \{a, b, c, d, e\}$ y que una relación R en S es

$$aRa, bRb, cRc, aRc, cRa, aRd, eRa$$

entonces añade la cantidad mínima de relaciones entre los elementos de S para que

- i) R sea reflexiva.
- ii) R sea simétrica,
- iii) R sea transitiva, pero no simétrica
- iv) sólo transitiva
- ...

15. ¿Es $R = A \times A$ una relación de equivalencia en A ?
16. En caso afirmativo en el problema anterior ¿Cuál es la clase de equivalencia de $x \in A$?
17. ¿Es $R = (A \times A) \setminus \{(x, x) | x \in A\}$ una relación de equivalencia en A ?
18. ¿Cuántas relaciones binarias tiene $A = \{a, b\}$? ¿Cuáles son relaciones de equivalencia?

19. La función

$$\phi(n, m) = m + \frac{(n + m)(n + m + 1)}{2}$$

mapea $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Demuestra que es una biyección.

20. Un conjunto X se dice de cardinal infinito (de cardinalidad infinita) si contiene un subconjunto $F \subseteq X$ tal que existe $c : \mathbb{N} \rightarrow F$ biyectivo.
Demuestra que si existe un map biyectivo $\mu : \mathbb{N} \rightarrow X$ entonces para cualquier subconjunto $F \subseteq X$ tenemos : o es finito, o bien tiene una biyección $\mathbb{N} \rightarrow F$ también.
21. Demuestra que la composición de biyecciones también es biyección.

22. Sea $f : S \rightarrow T$ un map sobreyectivo. Demuestra que si para cualquiera dos $x, y \in S$ definimos

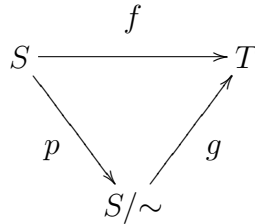
$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

entonces esto determina una relación de equivalencia en S .

23. Si denotamos con S/\sim la partición de S por esta relación entonces podemos factorizar a f así:

$$f = g \circ p$$

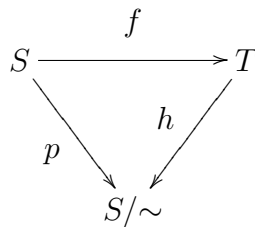
donde $p(x) = [x]$, p asigna a x su clase de equivalencia de x . Y g esta definida por la asignación $g([x]) = f(x)$. Esquemáticamente tenemos:



Explica porqué p es sobreyectiva.

Demostrar que g esta bien definido, i.e., si $[x] = [y]$ entonces $g([x]) = g([y])$.

24. Además demuestra que p es inyectiva y g es biyección.
25. También la asignación $h : T \rightarrow S/\sim$ definida vía: $h(u) = [s]$, para los $s \in S$ tales que $f(s) = u$, determina:
- h está bien definida, i.e. si s_1, s_2 cumplen $f(s_1) = f(s_2) = u$ entonces $h(u) = [s_1]$ tanto como $h(u) = [s_2]$.
 - h es biyección también.
 - demuestra que $h \circ g = Id_T$ y $g \circ h = Id_{S/\sim}$. Esto es: $h \circ g(t) = t$ para todos los $t \in T$ y $g \circ h([z]) = [z]$ para todas las $[z] \in S/\sim$.



26. Usando las matrices

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula la tabla de Cayley de las palabras ordenando

$$E < A < AB < AB^2 < B < B^2$$

Checa que se tiene

$$A^2 = E,$$

$$B^3 = E,$$

$$AB = B^2A$$

o

$$BA = AB^2.$$

También

$$AB \neq BA;$$

$$ABAB = E;$$

$$AB^2AB^2 = E; \dots$$

27. Usando aritmética módulo 2. ¿Cuáles son las matrices de 2×2 con entradas módulo dos y determinante $\neq 0$ tenemos?

Observa estas primeras tres:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \equiv 1 \pmod{2}$$

Ellas satisfacen:

$$a^2 = e, \quad b^3 = e, \quad \text{y} \quad ab = b^2a$$

28. Arma la tabla de Cayley ordenado $e < a < ab < ab^2 < b < b^2$, también: Arma la tabla de Cayley ordenado $e < a < b < ab < b^2 < ab^2$, el conocido orden alfabético. Compara las tablas.