CANONICAL's PROBLEMS

juan márquez

1. Sea $f : S \to T$ un map. Sean $A, B \subset S$ entonces

   i) ¿$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

   ii) Sean $X, Y \subset T$. Demuestra$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

2. Escribe y ejemplifica las definiciones de relación de equivalencia en un conjunto y clase de equivalencia.

3. En $\mathbb{Z}$, $n \sim m$ si y sólo si $nm \geq 0$, es una realción de equivalencia.

4. Demostrar que $\phi(n, m) = m + \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$ es biyectiva $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

5. Con las seis matrices de 2×2 de entradas en $\mathbb{Z}_2 = \{0 = [0], 1 = [1]\}$ y de determinante igual a uno, construye la tabla de Cayley multiplicativa.

6. Demuestra que si $\#S = 5$, entonces hay $\binom{5}{k}$ subconjuntos con k elementos.

7. Demuestra que si $\#S = 6$, entonces hay $\binom{6}{k}$ subconjuntos con k elementos.

8. Demuestra que si $\#S = n$, entonces hay $\binom{n}{k}$ subconjuntos con k elementos.

9. Demuestra que la composición de $\alpha : X \to Y$ y $\beta : Y \to Z$ es biyectiva, si α y β lo son.

10. Encuentra las 24 matrices de dos-por-dos con $entries$ en $\mathbb{Z}_3$, y que tienen inverso multiplicativo:

    Ejemplos:

    $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$...

11. Demuestra que el map $\mathbb{R} \to (-1, 1)$, de los reales al intervalo abierto $x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1$, dando por

    $$x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

    es una biyección.

12. Demuestra que $\binom{12}{3} + \binom{12}{4} = \binom{13}{4}$

13. Supón que un conjunto de 123 elementos tiene $\binom{123}{k}$ subconjuntos con k elementos. Entonces ¿Cómo se construyen todos los subconjuntos de uno de 124 con k elementos?

14. Supongamos que $\mathcal{S} = \{a, b, c, d, e\}$ y que una relación R en $\mathcal{S}$ es

$$aRa, bRb, cRc, aRc, cRa, aRd, eRa$$

entonces añade la cantidad mínima de relaciones entre los elementos de $\mathcal{S}$ para que

i) R sea reflexiva.

ii) R sea simétrica,

iii) R sea transitiva, pero no simétrica

iv) sólo transitiva

. . .

15. ¿Es $R = A \times A$ una relación de equivalencia en A?

16. En caso afirmativo en el problema anterior ¿Cuál es la clase de equivalencia de $x \in A$?

17. ¿Es $R = (A \times A) \setminus \{(x, x) | x \in A\}$ una relación de equivalencia en A?

18. ¿Cuántas relaciones binarias tiene $A = \{a, b\}$? ¿Cuáles son relaciones de equivalencia?

19. La función
$$\phi(n, m) = m + \frac{(n + m)(n + m + 1)}{2}$$
mapea $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Demuestra que es una biyección.

20. Un conjunto X se dice de cardinal infinito (de cardinalidad infinita) si contiene un subconjunto $F \subseteq X$ tal que existe $c : \mathbb{N} \to F$ biyectivo.

    Demuestra que si existe un map biyectivo $\mu : \mathbb{N} \to X$ entonces para cualquier subconjunto $F \subseteq X$ tenemos : o es finito, o bien tiene una biyección $\mathbb{N} \to F$ también.

21. Demuestra que la composición de biyecciones también es biyección.

22. Sea $f : S \to T$ un map sobreyectivo. Demuestra que si para cualquiera dos $x, y \in S$ definimos
$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$
entonces esto determina una relación de equivalencia en S.

23. Si denotamos con $S/\!\sim$ la partición de S por esta relación entonces podemos factorizar a f así:
$$f = g \circ p$$
donde $p(x) = [x]$, p asigna a x su clase de equivalencia de x. Y g esta definida por la asignación $g([x]) = f(x)$. Esquemáticamente tenemos:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & T \\ & S/\!\sim \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Explica porqué p es sobreyectiva.

Demostrar que g esta bien definido, i.e., si $[x] = [y]$ entonces $g([x]) = g([y])$.

24. Además demuestra que p es inyectiva y g es biyección.

25. También la asignación $h : T \to S/\!\sim$ definida vía: $h(u) = [s]$, para los $s \in S$ tales que $f(s) = u$, determina:

i) h está bien definida, i.e. si s_1, s_2 cumplen $f(s_1) = f(s_2) = u$ entonces $h(u) = [s_1]$ tanto como $h(u) = [s_2]$.

ii) h es biyección también.

iii) demuestra que $h \circ g = Id_T$ y $g \circ h = Id_{S/\sim}$. Esto es: $h \circ g(t) = t$ para todos los $t \in T$ y $g \circ h([z]) = [z]$ para todas las $[z] \in S/\!\sim$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & T \arrow[dl, "h"'] \\ & S/\!\sim & \end{tikzcd}$$

26. Usando las matrices
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
calcula la tabla de Cayley de las palabras ordenando
$$E < A < AB < AB^2 < B < B^2$$
Checa que se tiene
$A^2 = E$,
$B^3 = E$,
$AB = B^2A$
o
$BA = AB^2$.

También
$AB \neq BA$;
$ABAB = E$;
$AB^2AB^2 = E$; . . .

27. Usando aritmética módulo 2. ¿Cuáles son las matrices de 2×2 con entradas módulo dos y determinante $\neq 0$ tenemos?

Observa estas primeras tres:
$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$
$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$
$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \equiv 1 \bmod 2$
Ellas satisacen:
$$a^2 = e, \quad b^3 = e, \quad \text{y} \quad ab = b^2a$$

28. Arma la tabla de Cayley ordenado $e < a < ab < ab^2 < b < b^2$, también: Arma la tabla de Cayley ordenado $e < a < b < ab < b^2 < ab^2$, el conocido orden alfabético. Compara las tablas.