Álgebra Multilineal sobre $\mathbb{R}$

Lección tres

re-ingeniería del cálculo vectorial

por J.M. M.árquez-Bobadilla
CUCEI
Universidad de Guadalajara

cálculo vectorial:

340 años después de Isaac Newton - Gottfried Leibniz
165 años después de Hermann Grassmann y
125 años después de Willard Gibbs - Oliver Heaviside

-derivadas de campos $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
-series de Taylor de varias variables (campos escalares y campos vectoriales)
-matriz jacobiana o jacobiano
-hessiano
-derivada direccional
-derivada covariante (o conexión) estándar de $\mathbb{R}^n$
-diferencial total
-formas diferenciales euclídeas: 1-formas, 2-formas,... , n-formas
-producto exterior
-derivada exterior
-derivaciones y conmutadores
-teorema fundamental del cálculo
-teorema cambio de variables en una integral
-integrales de línea y superficie
-teoremas de Stokes

Cálculo en $\mathbb{R}^n$

§§ Continuidad y diferenciabilidad

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto *abierto*.

Una aplicación $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es $C^o(a_0)$ –continua en a_0– si $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ que satisface $|f(x) - f(a_0)| < \varepsilon$, si $|x - a_0| < \delta$.

Es decir[1] $fB_\delta(a_0) \subseteq B_\varepsilon(f(a_0))$.

Una aplicación $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es $C^1(p_0)$ —1-diferenciable— si

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^k} \mid_{p_0} = \frac{\partial f(p_0)}{\partial x^k}, \tag{1}$$

existen y son continuas. Además, $f \in C^1(\Omega)$, si (1) para todo $p \in \Omega$.

Una aplicación $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, que es caracterizada por

$$x \mapsto F(x) = \begin{pmatrix} F^1(x) \\ \vdots \\ F^m(x) \end{pmatrix} = F^s(x)e_s$$

es $C^1(\Omega)$ si las $F^k \in C^1(\Omega)$.

Las F^k reciben el nombre de *funciones componentes* del *campo vectorial* estandar F en Ω.

Denotaremos con $\mathcal{X}(\Omega)$ al conjunto de todos los campos vectoriales $\Omega \to \mathbb{R}^n$ diferenciables

La diferenciabilidad de F conduce a la existencia de una matriz rectangular

$$JF|_a = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \mid_a\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1(a)}{\partial x^1} & \frac{\partial F^1(a)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^1(a)}{\partial x^n} \\ \frac{\partial F^2(a)}{\partial x^1} & \frac{\partial F^2(a)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^2(a)}{\partial x^n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial F^2(a)}{\partial x^1} & \frac{\partial F^2(a)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^2(a)}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

en cada punto del dominio $a \in \Omega$. Esta matriz es llamada el **jacobiano** de F en a

Dadas dos transformaciónes $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ y $G : F(\Omega) \to \mathbb{R}^l$ con $F(\Omega)$ abierto, la **regla de la cadena** queda formulada como

$$J(G \circ F)_a = JG|_{F(a)}\ JF|_a$$

Otra forma de visualizar tal situación es

$$\Omega \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{G} \mathbb{R}^l$$

que representa

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^l \end{pmatrix},$$

[1] $B_r(a) = \{x \in R|\ |x - a| < r\}$

entonces $J(G \circ F) = JG\ JF$ toma la forma

$$\left[\ \frac{\partial z^i}{\partial x^j}\ \right] = \left[\ \frac{\partial z^i}{\partial y^k}\ \right]\left[\ \frac{\partial y^k}{\partial x^j}\ \right],$$

dando la expresión

$$\begin{aligned}\frac{\partial z^i}{\partial x^j} &= \frac{\partial z^i}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^j} + ... + \frac{\partial z^i}{\partial y^m}\frac{\partial y^m}{\partial x^j},\\ &= \sum_k \frac{\partial z^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j},\\ &= \frac{\partial z^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}.\end{aligned}$$

donde estamos usando la **convención de la suma** de Einstein.

§§ series de Taylor de varias variables (campos escalares y campos vectoriales)

La serie de Taylor para un *campo escalar* estandar $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es el desarrollo

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x^1}(x^1 - a^1) + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x^n}(x^n - a^n) +$$

$$\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f(a)}{\partial {x^1}^2}(x^1 - a^1)^2 + \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^1 \partial x^2}(x^1 - a^1)(x^2 - a^2) + \cdots + \frac{\partial^2 f(a)}{\partial {x^n}^2}(x^n - a^n)^2] + o(3),$$

donde $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ está cercano a $a = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$

Si denotamos con

$$\mathrm{grad} f(a) = \left[\frac{\partial f(a)}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial f(a)}{\partial x^n}\right]$$

el **gradiente** de f en a y con la matriz

$$\mathrm{hess} f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^1 \partial x^1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^1 \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2 \partial x^1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2 \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2 \partial x^n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^n \partial x^1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^n \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^n \partial x^n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^i \partial x^j}\right]$$

el **hessiano** de f en a, entonces el desarrollo de Taylor toma la forma

$$f(x) = f(a) + \mathrm{grad} f(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^{\top} \mathrm{hess} f(a)(x-a) + \cdots$$

La **derivada direccional** se define para un campo escalar f y para una dirección unitaria $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ como

$$Xf = \langle X, \mathrm{grad} f \rangle$$

que indica como varía f en dirección X.

En un punto a tenemos

$$Xf \mid_a = \langle X(a), \mathrm{grad} f(a) \rangle = X^i(a) \frac{\partial f(a)}{\partial x^i}$$

donde estamos usando otra vez la convención de Einstein.

§§ **Linearización**

Si f es una función diferenciable en una variable entonces la linearización de ésta en a es

$$L_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

Note que $L'_{f,a}(x) = f'(a)$

Pero si f es una función diferenciable de varias variables $x = (x^1, ..., x^n)$ entonces su linearización en a es

$$\begin{aligned} L_{f,a}(x) &= f(a) + \mathrm{grad} f(a) \cdot (x-a) \\ &= \mathrm{grad} f(a) \cdot x + f(a) - a \cdot \mathrm{grad} f(a)) \\ &= \frac{\partial f(a)}{\partial x^1} x^1 + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x^n} x^n + f(a) - a^1 \frac{\partial f(a)}{\partial x^1} - \cdots - a^n \frac{\partial f(a)}{\partial x^n} \end{aligned}$$

Note que $\mathrm{grad} L_{f,a} = \mathrm{grad} f(a)$

§§ **Derivada covariante**

La **derivada covariante** estandar de $\mathbb{R}^n$ de dos campos vectoriales $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es la construcción[2];

$$D_X Y\mid_a = \begin{pmatrix} XY^1\mid_a \\ \vdots \\ XY^n\mid_a \end{pmatrix}$$

$$D_X Y := XY^1 e_1 + \cdots + XY^n e_n$$

donde $Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix}$ y $XY^k = \langle X, \mathrm{grad} Y^k \rangle$.

Claramente $D_X Y$ "captura" la variación de Y en dirección X midiendo como varian sus componentes. Además tenemos que satisface las propiedades

$$D_X(Y+Z) = D_X Y + D_X Z,$$

$$D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z,$$

$$D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z,$$

$$D_{fX} Y = f D_X Y,$$

$$D_X(fY) = (Xf)Y + f D_X Y,$$

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$$

para cualquiera tres campos vectoriales $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y para cualquier campo escalar $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Note que $D_X Y = (JY)X$ tanto como $D_X Y\mid_a = (JY)|_a X|_a$:

$$D_X Y = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial Y^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial Y^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial Y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial Y^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial Y^2}{\partial x^n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial Y^n}{\partial x^1} & \frac{\partial Y^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial Y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

$$D_X Y|_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^1}{\partial x^1}|_a & \frac{\partial Y^1}{\partial x^2}|_a & \cdots & \frac{\partial Y^1}{\partial x^n}|_a \\ \frac{\partial Y^2}{\partial x^1}|_a & \frac{\partial Y^2}{\partial x^2}|_a & \cdots & \frac{\partial Y^2}{\partial x^n}|_a \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial Y^n}{\partial x^1}|_a & \frac{\partial Y^n}{\partial x^2}|_a & \cdots & \frac{\partial Y^n}{\partial x^n}|_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}_{|_a}$$

[2]En un punto $a \in \Omega$

De aquí en adelante solo trataremos funciones de clase C^∞ en alguna región de $\mathbb{R}^n$.

§§ Imagen inversa de una función regular

Sea Ω abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces el conjunto

$$f^{-1}(a) = \{p \in \Omega : f(p) = a \text{ y } Jf_p \neq 0\}$$

es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de codimensión 1, lo que implica que determina una hiper-superficie.

A el valor $f(a)$ se le llama *valor regular* de la función si el gradiente $Jf|_a$ es diferente de $\vec{0}$ y a *a punto regular*. Cuando $Jf|_a = \vec{0}$ se dice que a es un *punto crítico* y al valor $f(a)$ *valor crítico*

Para entender mejor la idea vamos a mirar los siguientes ejemplos:

1) Si $f(x, y) = x^2 - y$ entonces la imagen inversa del origen

$$f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}$$

es lo mismo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ es decir una parábola. Podemos ver que la imagen inversa de cualquier otro número real ρ digamos determina una parábola $f^{-1}(\rho) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + \rho\}$ similar a la de $f^{-1}(0)$ pero trasladada verticalmente una cantidad ρ desde origen.

2) Si $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ entonces $F^{-1}(\rho) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - z = \rho\}$ es el paraboloide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : z = x^2 + y^2 + \rho\}$

3) También $\Phi(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ satisface que $\Phi^{-1}(0)$ es una esfera de radio uno centrada en el origen de $\mathbb{R}^3$

En general para una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la gráfica:

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

puede ser descrita por la imagen inversa de cero de la función auxiliar $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ i.e. $\mathrm{Graf}(f) = F^{-1}(0)$.

§§ Formas diferenciales euclídeas

Las derivadas direccionales básicas -en n-variables- son las elementales derivaciones:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$$

que pueden ser consideradas como operadores que actúan sobre funciones $f \in C^\infty(\Omega)$ para obtener (o asociar) a una función f otras funciones más:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^n}$$

Pero también como los generadores de un $C^\infty(\Omega)$-módulo de dimensión n: pues si

$$X \in \mathrm{gen}_{C^\infty(\Omega)} \left\{ \ \tfrac{\partial}{\partial x^1}, \ \dots \ , \tfrac{\partial}{\partial x^n} \ \right\}$$

entonces

$$X = X^s \frac{\partial}{\partial x^s}$$

donde las $X^s \in C^\infty(\Omega)$ y desde donde podemos ver que X actúa como el operador derivada direccional

$$Xf = X^s \frac{\partial f}{\partial x^s}$$

que asocia otra función a f y un número

$$Xf|_a = X^s(a) \frac{\partial f(a)}{\partial x^s}$$

si evaluamos, es decir

$$C^\infty(\Omega) \times \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

vía

$$(f, a) \mapsto Xf|_a$$

Denotemos con $\mathrm{Der}(\Omega) = \mathrm{gen}_{C^\infty(\Omega)}\{\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. Observe que si $X \in \mathrm{Der}(\Omega)$ entonces $X = X^s \frac{\partial}{\partial x^s}$

La construcción dual es:

El módulo dual $\mathrm{Der}(\Omega)^*$ es descrito en términos de las formas diferenciales

$$dx^1, dx^2, ..., dx^n$$

que satisfacen

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta^i{}_j$$

Esta última relación proviene de la relación

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

Esto es perfectamente compatible con la noción de diferencial total de una función:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

o en la convención de Einstein-Penrose:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^s} dx^s$$

y cuando queremos evaluar:

$$df(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x^s} dx^s$$

Observemos también:

$$\begin{aligned}
df(X) &= X^s df \left(\frac{\partial}{\partial x^s} \right) \\
&= X^s \frac{\partial f}{\partial x^t} dx^t \left(\frac{\partial}{\partial x^s} \right) \\
&= X^s \frac{\partial f}{\partial x^t} \delta^t{}_s \\
&= X^s \frac{\partial f}{\partial x^s} \\
&= \langle X, \mathrm{grad} f \rangle
\end{aligned}$$

§§ El complejo de *de Rham* de un abierto de $\mathbb{R}^3$

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ entonces tenemos las siguientes relaciones:

$$\mathcal{X}(\Omega) \cong \mathrm{gen}_{C^\infty(\Omega)}\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\}$$

y

$$\mathcal{X}(\Omega)^* \cong \mathrm{gen}_{C^\infty(\Omega)}\{dx, dy, dz\}$$

$\Lambda^0(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ las 0-formas en Ω

$\Lambda^1(\Omega) = \mathcal{X}(\Omega)^* = \mathrm{gen}_{C^\infty(\Omega)}\{dx, dy, dz\}$ las 1-formas en Ω

$\omega \in \Lambda^1(\Omega)$ entonces $\omega = \omega_s dx^s$, donde $\omega^s \in C^\infty(\Omega)$

$dx \wedge dy = dx \otimes dy - dy \otimes dx$
$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$
$dx \wedge dx = 0$

$\Lambda^2(\Omega) = \mathrm{gen}_{C^\infty(\Omega)}\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$ los 2-formas o bivectores en Ω

$P \in \Lambda^2(\Omega)$ entonces $P = P_{st} dx^s \wedge dx^t$, donde $P_{st} \in C^\infty(\Omega)$

$\Lambda^3(\Omega) = \mathrm{gen}_{C^\infty(\Omega)}\{dx \wedge dy \wedge dz\}$ las 3-formas (o formas de volumen)

$V \in \Lambda^3(\Omega)$ entonces $V = \rho\ dx \wedge dy \wedge dz$, donde $\rho \in C^\infty$

§§ La derivada exterior

Se tiene una forma de relacionar formas diferenciales de grados consecutivos, se llama derivada exterior

$$d : \Lambda^0(\Omega) \to \Lambda^1(\Omega)$$

$$f \mapsto df = \frac{\partial f}{\partial x^s} dx^s$$

$$d : \Lambda^1(\Omega) \to \Lambda^2(\Omega)$$

$$w = w_s dx^s \mapsto dw = \frac{\partial w_s}{\partial x^t}\ dx^t \wedge dx^s$$

$$d : \Lambda^2(\Omega) \to \Lambda^3(\Omega)$$

$$B = B_{st}\ dx^s \wedge d^t \mapsto dB = \frac{\partial B_{st}}{\partial x^u}\ dx^u \wedge dx^t \wedge dx^s$$

Observamos que se tiene la siguiente propiedad:

$$dd = 0$$

Esto implica que el $\mathrm{im} d \subseteq \ker d$

Los espacios cociente

$$H^k(\Omega) = \frac{\ker d}{\mathrm{im} d}$$

son los famosos módulos cohomológicos de *de Rham*

§§ **Conmutadores**

Si X, Y son dos campos vectoriales su conmutador se define mediante la relación

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X$$

Satisface la relación de Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

Visualizados los campos X, Y como derivaciones, el conmutador también se puede calcular mediante

$$[X, Y] = XY - YX$$

donde debemos respetar la regla de Leibnitz cuando derivamos un producto. Entonces esta construcción tiene componentes

$$[X, Y] = \left(X^s \frac{\partial Y^t}{\partial x^s} - Y^s \frac{\partial X^t}{\partial x^s} \right) \frac{\partial}{\partial x^t}$$

§§ **Teorema fundamental del cálculo**

Sea f una *función continua* en un intervalo $[a, b]$ entonces tenemos la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde la función F satisface $F'(x) = f(x)$

§§ **Teorema de cambio de variables en una integral**

$$\int_{\phi U} f(x^1, ..., x^k)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k = \int_U f(\phi(u^1, ..., u^k))|J\phi(u^1, ..., u^k)|du^1 \wedge \cdots \wedge du^k$$

§§ **Integrales sobre formas**

Una integral de línea en $\mathbb{R}^k$ es un objeto

$$\int_\gamma \omega \qquad (IL)$$

donde $\gamma : I \to \mathbb{R}^k$ es una curva k-dimensional y ω un covector (o 1-forma diferencial) ω en $\mathbb{R}^k$

Para evaluar (IL) uno utiliza la parametrización de γ

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = x^s(t)e_s$$

y cambiando todos los dx^s de ω por

$$dx^s = \frac{dx^s(t)}{dt}dt = x^{s\prime}(t)dt$$

Entonces

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (\omega_s dx^s) = \int_a^b \omega_s(\gamma(t))\frac{dx^s(t)}{dt}dt$$

Una integral de superficie

$$\int_{\Sigma} \rho \qquad (IS)$$

es un número real que se obtiene a partir de una superficie Σ en $\mathbb{R}^k$ y un bivector (o 2-forma) ρ en un dominio abierto que contiene a Σ

Este número es calculado usando una parametrización de la superficie $\phi : R \to \Sigma$. Para ilustrar el método usaremos una superficie en $\mathbb{R}^3$. Bajo esta restricción,

$$\phi : \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Entonces

$$dx = \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw$$

entonces

$$dy \wedge dz = \left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}\right) dv \wedge dw$$

$$dz \wedge dy = \left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}\right) dv \wedge dw$$

$$dx \wedge dy = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}\right) dv \wedge dw$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \rho &= \int_{\Sigma} (f\ dy \wedge dz) + g\ dz \wedge dy + h\ dx \wedge dy) \\ &= \int\int_R \left(f \left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}\right) + g \left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}\right) + h \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}\right)\right) dv \wedge dw \end{aligned}$$

§§ El teorema de Stokes

Sean R una región k-dimensional en $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂R y Γ una $k-1$-forma definida en un dominio abierto que contiene a R entonces

$$\int_{\partial R} \Gamma = \int_R d\Gamma$$